

Eine Methode zur Positionsberechnung aus Relativmessungen

Von Eckhardt Schön, Erfurt

Mit 4 Abbildungen

Die Bewegung der Sterne und Planeten vollzieht sich für einen irdischen Beobachter scheinbar an einer zweidimensionalen gleichmäßig gekrümmten Fläche, der Himmelskugel. Zur genauen Beschreibung der scheinbaren Position und Bahn von Himmelskörpern wurden verschiedene Koordinatensysteme eingeführt (z.B. Äquator-, Horizont- und Ekliptiksystem). Leider gibt es für diese Systeme keine sichtbaren Markierungen an der Himmelssphäre. Man kann die Koordinaten mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie berechnen, nachdem man Relativmessungen von Winkeln zur Position anderer Himmelskörper durchgeführt hat.

In diesem Artikel wird eine Methode vorgestellt, die es vergleichsweise einfach ermöglicht, aus der Messung des Winkelabstands zu mindestens zwei scheinbar benachbarten Sternen auf die unbekannte Position eines Himmelskörpers zu schließen. Die Messungen der Abstände kann man entweder direkt am Himmel mit Hilfe von Jakobsstab oder Sextant vornehmen oder aber in Auswertung einer Astrofotografie. Gerade bei Fotoaufnahmen mit einem relativ großen Gesichtsfeld (z.B. Meteorbeobachtungen) kann die Auswertung mit diesem Verfahren sehr nützlich sein.

Um den Rechengang nachzuvollziehen, benötigt man Grundkenntnisse der sphärischen Trigo-

nometrie und über astronomische Koordinatensysteme. Am Ende des Artikels wird ein Computerprogramm vorgestellt, das dieses Verfahren benutzt.

Sinus- und Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie

Im Gegensatz zur ebenen Trigonometrie wird die sphärische, wie der Name schon sagt, auf einer Kugeloberfläche betrieben. In unserem Fall ist dies die Himmelssphäre, die den Beobachter umgibt. Ihr Radius wird als unendlich angenommen, um Parallaxen zu vermeiden.

Hier kann natürlich keine Einführung in die sphärische Trigonometrie gegeben werden, aber an die beiden wichtigsten Sätze soll kurz erinnert werden. Sie gelten in sphärischen Dreiecken, deren Seiten Abschnitte von Großkreisen sind. Großkreise sind Kreise auf der Kugeloberfläche, die den Kugelmittelpunkt als ihren Mittelpunkt haben und die deshalb den gleichen Radius, wie die Kugel besitzen. Die *Abbildung 1* zeigt ein solches sphärisches Dreieck.

Für jedes derartige Dreieck gelten der Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (1)$$

und der Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha . \quad (2)$$

Letzteren Satz kann man für die beiden anderen Dreiecksseiten natürlich in analoger Weise aufschreiben. Beide Sätze werden bei den folgenden Ableitungen mehrfach verwendet.

Winkelabstand zweier Sterne

Wenn man die Position zweier Sterne kennt, kann man ihren Abstand mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie berechnen. Wir benutzen in diesem Artikel nur die Koordinaten des Rotierenden Äquatorsystems, die Rektaszension α und die Deklination δ .

Die *Abbildung 2* zeigt zwei Sterne mit beliebigen Koordinaten (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) sowie Abschnitte von Großkreisen $\alpha = \text{const.}$ und $\delta = 0$, die senkrecht aufeinander stehen. Die

Anwendung des Kosinussatzes auf das untere Dreieck ergibt, unter Verwendung der Abkürzung

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 :$$

$$\begin{aligned}\cos\eta &= \cos\Delta\alpha \cdot \cos\delta_2 + \sin\Delta\alpha \cdot \sin\delta_2 \cdot \cos 90^\circ \\ &= \cos\Delta\alpha \cdot \cos\delta_2 .\end{aligned}\tag{3}$$

Den Winkel ζ_1 berechnet man mit Hilfe des Sinussatzes zu

$$\sin\zeta_1 = \frac{\sin\delta_2}{\sin\eta} .\tag{4}$$

Da gilt

$$\zeta_2 = 90^\circ - \zeta_1 ,\tag{5}$$

folgt nach Anwendung des Kosinussatzes auf das obere Dreieck die Beziehung:

$$\cos\sigma = \cos\eta \cdot \cos\delta_1 + \sin\eta \cdot \sin\delta_1 \cdot \cos(90^\circ - \zeta_1) .\tag{6}$$

Unter Verwendung der Formel (4) erhält man letztlich den Winkelabstand σ :

$$\cos\sigma = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2 + \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 .\tag{7}$$

Bei sehr kleinen Winkeln wird diese Formel problematisch, da dann die Kosinuswerte in der Nähe von Eins liegen und deshalb eine hohe Rechengenauigkeit erforderlich ist. Man nähert den Winkelabstand σ dann besser mit Hilfe des ebenen Satzes des PYTHAGORAS an:

$$\sigma^2 \approx (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2 .\tag{8}$$

Das Problem liegt jedoch meist anders: Die Abstände eines unbekanntes Objektes von mehreren Sternen, deren Koordinaten bekannt sind, wurden gemessen. Nun soll die Position dieses Objektes berechnet werden. Dazu kann man die Formel (7) heranziehen.

Man muß den Abstand des gesuchten Objektes von mindestens zwei Sternen mit bekannten Koordinaten messen. Im Ergebnis erhält man zwei mögliche Positionen des zu vermessenden Objektes, die zunächst gleichberechtigt sind (*Abbildung 3*). Eine liegt diesseits der Verbindungslinie der beiden Sterne und die andere jenseits. Nur anhand einer Skizze oder von

weiteren Messungen kann man entscheiden, welche von beiden Positionen richtig ist.

In vielen Fällen kann man jedoch den Abstand zu mehr als zwei Referenzsternen bestimmen, und dann stellt sich folgendes Problem. Bekannt sind die Positionen von n Sternen (α_i, δ_i mit $i = 1 \dots n$) sowie die Winkelabstände des unbekanntes Objektes von diesen Sternen ω_i . Dann gilt unter Verwendung der Formel (7):

$$\cos \omega_i = \cos(\alpha_p - \alpha_i) \cdot \cos \delta_p \cdot \cos \delta_i + \sin \delta_p \cdot \sin \delta_i \quad (i = 1 \dots n) \quad (9)$$

Dies ist ein System von n transzendenten Gleichungen und läßt sich nicht nach den gesuchten Koordinaten α_p und δ_p auflösen.

Mehrschrittverfahren zur Positionsbestimmung

Im folgenden wird ein Mehrschrittverfahren vorgestellt, das zur Positionsbestimmung benutzt werden kann. Dieses Verfahren wurde vom Autor in ein Computerprogramm umgesetzt, um es praktikabel zu machen.

Die folgenden Bezeichnungen beziehen sich auf die *Abbildungen 3* und *4*, der man auch die Definition der verwendeten Symbole entnehmen kann.

1. Schritt

Zunächst skizziert man die Lage der beiden Referenzsterne S_1 und S_2 sowie des gesuchten Objektes P . Um die Eindeutigkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wird vereinbart, daß der Stern mit kleineren Rektaszension die Bezeichnung S_1 erhält.

Der Punkt P' hat zu den beiden Referenzsternen jeweils genau den gleichen Abstand. Deshalb wird das Verfahren die Koordinaten der beiden Punkte liefern.

Für praktische Rechnungen wandelt man die Koordinatenangaben zunächst in dezimalgeteiltes Grad um.

2. Schritt

Mit Hilfe der oben abgeleiteten Formel (7) berechnet man den Abstand σ der beiden Referenzsterne S_1 und S_2 :

$$\cos \sigma = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2 + \sin \delta_1 \cdot \sin \delta_2 \quad (10)$$

3. Schritt

Nun folgt die Berechnung des Winkels ζ im Dreieck S_1PS_2 mit Hilfe des Kosinussatzes (Abbildung 4):

$$\cos \zeta = \frac{\cos \omega_1 - \cos \omega_2 \cdot \cos \sigma}{\sin \omega_2 \cdot \sin \sigma} . \quad (11)$$

Wegen der Mehrdeutigkeit der Arcuskosinus-Funktion erhält man zwei Winkel ζ , die den beiden Positionen P und P' entsprechen.

4. Schritt

Es folgt die Berechnung des Winkels γ im Dreieck NS_2S_1 (N bezeichnet den Himmelsnordpol) mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \delta_1 - \sin \delta_2 \cdot \cos \sigma}{\cos \delta_2 \cdot \sin \sigma} . \quad (12)$$

Hier kann man anhand der Skizze i.a. den Winkel γ eindeutig bestimmen. Er muß kleiner als 180° sein.

5. Schritt

Die beiden möglichen Positionen des gesuchten Objektes P und P' müssen weiterhin als gleichberechtigt angesehen werden. Wir definieren einen Winkel ε , der als Winkel $\sphericalangle NS_2P$ festgelegt wird. Für die beiden möglichen Positionen ergeben sich nun verschiedene Winkel ε , wie man durch geometrische Überlegungen erhält:

$$\begin{array}{ll} \text{Position P:} & \varepsilon = 360^\circ - (\gamma + \zeta) \quad \text{falls } \gamma + \zeta > 180^\circ \\ & \varepsilon = \gamma + \zeta \quad \text{falls } \gamma + \zeta < 180^\circ \\ \text{Position P':} & \varepsilon' = |\gamma - \zeta| \end{array}$$

Die folgenden Schritte sind immer für beide Fälle parallel auszuführen, wenn man nicht schon hier anhand einer Skizze eine Entscheidung treffen kann.

6. Schritt

Durch nochmalige Anwendung des Kosinussatzes, diesmal auf das Dreieck PNS_2 , erhält man nach elementaren Umformungen die Deklination des gesuchten Objektes:

$$\sin\delta_p = \sin\delta_2 \cdot \cos\omega_2 + \cos\delta_2 \cdot \sin\omega_2 \cdot \cos\varepsilon \quad (13)$$

7. Schritt

Die Rektaszension gewinnt man durch Umformen der folgenden Beziehung, die als Formel (9) bereits abgeleitet wurde:

$$\cos\omega_1 = \cos(\alpha_p - \alpha_1) \cdot \cos\delta_p \cdot \cos\delta_1 + \sin\delta_p \cdot \sin\delta_1 \quad (14)$$

Man erhält

$$\alpha_p = \alpha_1 \pm \arccos \left(\frac{\cos\omega_1 - \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_p}{\cos\delta_1 \cdot \cos\delta_p} \right), \quad (15)$$

und damit zwei Werte für die Rektaszension (und zwar für jede der beiden theoretisch möglichen Positionen). Die Entscheidung muß entweder wieder mit Hilfe einer Skizze getroffen werden, oder man berechnet mit Hilfe der jetzt ermittelten Koordinaten α_p und δ_p den Abstand ω_2 zum zweiten Referenzstern. Dieser berechnete Wert hat nur für die richtige Rektaszension den gemessenen Betrag.

Damit kennt man die beiden Koordinaten α_p und δ_p sowohl für den Punkt P wie für den Punkt P'.

Hat man die Abstände zu mehr als zwei Sternen gemessen, kann man die Koordinaten aus jeder möglichen Kombination von Sternen berechnen, die notwendige Fallunterscheidung treffen und anschließend die Koordinatenwerte mitteln.

Es ist günstig, Referenzsterne zu wählen, die rund um das gesuchte Objekt verteilt sind. Der Fehler ist dann geringer, als wenn alle Bezugssterne in der gleichen Richtung vom unbekanntem Objekt liegen.

Der Rechengang ist etwas mühselig, und man sollte ihn möglichst einem Computer überlassen. Das vom Autor entwickelte Programm TAURUS realisiert das Verfahren für maximal acht Referenzsterne. Interessenten können das Programm gegen Einsendung einer Diskette und eines ausreichend frankierten Rückumschlags beziehen. Es bietet noch weitere nützliche Hilfsmittel für astronomische Berechnungen an. Die Möglichkeiten und die Benutzung des Programms werden in einem weiteren Artikel vorgestellt.

Anshr. d. Verf.: Dr. Eckhardt Schön
Pädagogische Hochschule Erfurt/Mühlhausen
Institut für Physik
PF 307
D - 99006 Erfurt